

Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Applications

1. Produit cartésien

Définition :

Si E et F sont deux ensembles :

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$$

On note $E^n = E \times E \times \dots \times E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ (n-uplet), } \forall i, x_i \in E\}$.

2. Applications

2.1. Vocabulaire

Définition :

Soient E et F deux ensembles.

On appelle application de E dans F un triplet

$f = (E, F, \Gamma)$ où $\Gamma \subset E \times F$ vérifie

$\forall x \in E, \exists ! y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Cet unique y noté $f(x)$ est appelé l'image de x par f .

Un x tel que $f(x) = y$ s'appelle antécédent de y par f .

Γ s'appelle le graphe de f .

Remarque :

Si on change E ou F , on change l'application.

Définition :

On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou E^F l'ensemble des applications de E dans F .

2.2. Composée

Définition :

Soient E, F et G trois ensembles, $f \in F^E, g \in G^F$

On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$

l'application : $g \circ f : E \rightarrow G$
 $x \mapsto g(f(x))$

Propriété :

$\circ$ est une loi associative mais non commutative :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad g \circ f \neq f \circ g$$

2.3. Restriction et prolongement

Définition :

Soient E, E' et F trois ensembles, $f \in F^E, E' \subset E$.

On appelle restriction de f à E' et on note $f|_{E'}$ l'application :

$$f|_{E'} : E' \rightarrow F$$
$$x \mapsto f(x)$$

Définition :

Soient E, E' et F trois ensembles, $f \in F^E, E \subset E'$

On appelle prolongement de f à E' l'application $g : E' \rightarrow F$ (ou F') telle que $g|_E = f$.

3. Injections, surjections et bijections

3.1. Équation

Position du problème :

Soient E et F deux ensembles. $f \in F^E$.

$f(x)=y$ avec $y \in F$ et $x \in E$ inconnu.

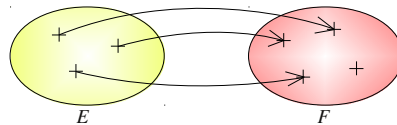
→ Recherche des antécédents de y .

3.2. Injections

Définition :

Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$

On dit que f est injective si tout élément y de F admet au plus un antécédent dans E par f .



Remarque :

$\text{Card}(F) \geq \text{Card}(E)$.

Proposition :

f injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E \quad f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$

Preuve :

$\Rightarrow$: Soient $x, x' \in E \quad f(x)=f(x')=y$

Si $x \neq x'$, y a deux antécédents, ce qui contredit f injective.

$\Leftarrow$: Par contraposition : si f n'est pas injective

$\exists y \in F$ tel que $\exists x, x' \in E$

$y=f(x)=f(x')$ et $x \neq x' \quad = \quad \text{non}(\forall x, x' \in E \quad f(x)=f(x') \Rightarrow x=x')$

Proposition :

1. La composée de deux applications injectives est injective.
2. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

Preuve :

1. On suppose f et g injectives.

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in E, \quad g \circ f(x) = g \circ f(x') &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x') \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est injective.

2. On suppose $g \circ f$ injective.

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Donc f est injective.

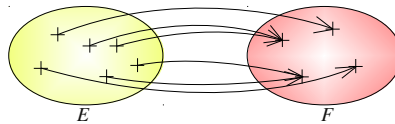
3.3. Surjections

Définition :

Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$

On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E par f :

f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.



Proposition :

1. La composée de deux fonctions surjectives est surjective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Preuve :

1. On suppose f et g surjectives.
 $\forall z \in G, \exists y \in F$ tel que $g(y) = z$ et $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$
Donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$
Donc $g \circ f$ est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective.
 $\forall z \in G, \exists x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$
On a donc $z = g(f(x)) = g(y)$
Donc g est surjective.

Remarque :

$g \circ f$ surjective $\nRightarrow f$ surjective.

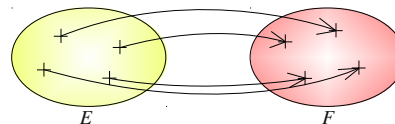
3.4. Bijections

Définition :

Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$

On dit que f est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent dans E par f .

f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$.



Proposition :

Soit $f \in F^E$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective
2. f est injective et surjective
3. $\exists g \in E^F$ tel que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

g s'appelle la bijection réciproque de f , notée f^{-1} .

Preuve :

$$1. \Rightarrow 3. : \forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

$$\text{On pose } g : F \rightarrow E \\ y \mapsto x$$

$$\forall y \in F, f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ g = \text{id}_F$$

$$\forall x \in F, g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x \Rightarrow g \circ f = \text{id}_E$$

$$3. \Rightarrow 2. : \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x' \text{ Donc } f \text{ est injective.}$$

$$\forall y \in F, y = f \circ g(y) = f(g(y))$$

$$\text{On pose } x = g(y) \in E, \text{ Alors } y = f(x) \text{ Donc } f \text{ est surjective.}$$

$$2. \Rightarrow 1. : \begin{cases} f \text{ est injective : } N \geq 1 \\ f \text{ est surjective : } N \leq 1 \end{cases} \Rightarrow N = 1.$$

$$\text{Unicité de } g : \text{ Supposons } \begin{cases} f \circ g = f \circ g' = \text{id}_F \\ g \circ f = g' \circ f = \text{id}_E \end{cases}$$

$$\text{Alors } g \circ f \circ g = g \circ f \circ g' \Rightarrow \text{id}_E \circ g = \text{id}_E \circ g' \Rightarrow g = g'$$

Proposition :

1. La composée de deux applications bijectives est bijective.

$$2. (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve :

1. f et g bijectives $\Rightarrow f$ et g injectives et surjectives.

$\Rightarrow g \circ f$ injective et surjective.

$\Rightarrow g \circ f$ bijective.

$$2. g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_G$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_F \circ f = \text{id}_E$$

4. Images directes et réciproques

Définition :

Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$, $A \subset F$, $B \subset F$

On appelle :

– Image directe de A par f et on note $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$

$$\forall y \in F, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

– Image réciproque de B et on note $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\} \subset E$

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

* * * * *